**Université Paris-Est Marne-la-Vallée**
**Université Paris-Est Créteil**

**École des Ponts ParisTech**
**Université d'Évry Val d'Essonne**

# Master MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Année universitaire 2011-2012

Le master recherche "Mathématiques et applications" est une des deux spécialités du master de mathématiques de l'université de Marne-la-Vallée. Il est organisé par quatre établissements cohabilités : l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, l'École des Ponts ParisTech, l'Université Paris-Est Créteil Val de Marne, et l'Université d'Évry Val d'Essonne. Cette brochure décrit la seconde année (correspondant au niveau DEA).

Responsable du Master : Damien Lamberton (damien.lamberton@univ-mlv.fr)
Secrétariat : Florence Gamon (florence.gamon@univ-mlv.fr) ou Christiane Lafargue (christiane.lafargue@univ-mlv.fr)
Tél. 01 60 95 75 20, Fax. 01 60 95 75 45
Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées
5 Boulevard Descartes
Cité Descartes, Champs-sur-Marne
77 454 Marne-la-Vallée CEDEX 2

Les correspondants du master, dans les établissements autres que l'université de Marne-la-Vallée, sont :

**à l'Université Paris-Est Créteil Val de Marne :**
E. Sandier
sandier@univ-paris12.fr
Tél. 01 45 17 16 42
Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
Université Paris XII
61 avenue du Général de Gaulle
94 010 Créteil CEDEX.

**à l'Université d'Évry Val d'Essonne :**
P.G. Lemarié-Rieusset
Pierre-Gilles.Lemarie@univ-evry.fr
Tél. 01 69 47 02 05
Département de mathématiques
Université d'Evry Val d'Essonne
Bâtiment Maupertuis
rue du Père André Jarlan
91 025 Evry CEDEX

**à l'École des Ponts :**
J.-F. Delmas
delmas@cermics.enpc.fr
Tél. 01 64 15 35 72
CERMICS-École des Ponts
6 et 8 avenue Blaise Pascal
Cité Descartes, Champs-sur-Marne
77 455 Marne-la-Vallée CEDEX 2

Web : http://master-ma.univ-mlv.fr/

## Présentation de la deuxième année de master

La deuxième année du master "Mathématiques et Applications" (anciennement "DEA Analyse et Systèmes Aléatoires") propose aux étudiants une double formation de base en analyse et en probabilités et des possibilités de spécialisation dans divers domaines proches des applications. Les étudiants peuvent choisir l'un des parcours suivants, les numéros d'unités d'enseignement (UE) renvoyant à la liste de la page 4 :

**Parcours finance** Ce parcours (en partenariat avec le site Math-fi.com) est axé sur la modélisation des marchés financiers et les méthodes numériques et s'appuie sur la formation d'ingénieurs de l'Ecole des Ponts. Ses effectifs sont limités à une vingtaine d'étudiants (hors élèves de l'Ecole des Ponts). Il comprend une UE de tronc commun (F1) et une UE intitulée "Mathématiques financières approfondies" (F2).

Le projet Mathfi, équipe de recherche commune à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, l'Ecole des Ponts ParisTech et l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique), assure l'encadrement scientifique de ce parcours. Cette équipe développe un logiciel de mathématiques financières en partenariat avec le milieu professionnel.

**Parcours probabilités appliquées** Ce parcours correspond aux UE 1.4, 1.5, 1.6, 2.1, 2.2 et s'appuie sur l'équipe de recherche en probabilité et statistique du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, laboratoire commun aux Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil. Il présente des outils probabilistes utiles dans de nombreux domaines d'application.

**Parcours analyse et applications (image, compressed sensing)** Destiné aux étudiants intéressés par l'analyse, ce parcours s'appuie sur les UE 1.1, 1.2, 1.3, 2.4, 2.5 et 2.6. Il est centré sur des thématiques développées dans les équipes de recherche des Universités Paris-Est Marne-la-Vallée, Paris-Est Créteil et d'Evry-Val-d'Essonne. Ce parcours permet de s'initier aux techniques les plus récentes de l'analyse dont certaines ont de remarquables applications dans les domaines de l'analyse d'images et du traitement de signaux.

Les parcours ci-dessus sont donnés à titre indicatif et d'autres choix sont possibles. En particulier, la variété des cours permet à de futurs **candidats à l'agrégation** de consolider leur culture mathématique tout en s'ouvrant à la modélisation.

## Conditions d'admission et modalités d'inscription

La deuxième année du master "Mathématiques et Applications" s'adresse aux étudiants ayant validé une première année de master en mathématiques pures ou appliquées ou justifiant d'un niveau équivalent, ainsi qu'aux élèves des Grandes Écoles. Les étudiants sont admis sur dossier. Ils doivent préciser le ou les parcours qu'ils envisagent de suivre, sachant que les effectifs du parcours finance sont limités à une vingtaine d'étudiants (hors élèves de l'Ecole des Ponts). Dans le cas où les informations contenues dans le dossier ne permettraient pas de conclure, les candidats pourront être convoqués pour un entretien.

Les candidatures se font en ligne, sur le site http://candidatures.univ-mlv.fr/, à partir du 4 avril 2011. En cas de difficulté pour candidater par ce moyen, prendre contact avec le secrétariat (`florence.gamon@univ-mlv.fr` ou `christiane.lafargue@univ-mlv.fr`, tél 01 60 95 75 20).

Les candidats admis s'inscrivent administrativement dans l'un des quatre établissements cohabilités (Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil, Université d'Evry, Ecole des Ponts).

Une **réunion d'information** aura lieu le mercredi 8 juin 2011, à 14 h., à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Bâtiment Copernic, salle 3.079.

### Organisation pédagogique

Le master est organisé en deux semestres. Les cours commencent le **lundi 19 septembre 2011**.

Les cours du premier semestre sont des cours de base. Des séances de perfectionnement en informatique sont également prévues. Le deuxième semestre est consacré d'une part à des cours plus spécialisés (de janvier à mars) et, d'autre part, à un stage ou mémoire d'initiation à la recherche. La liste de cours donnée dans cette brochure a un caractère indicatif et pourra être modifiée dans le courant du premier semestre, en fonction des effectifs et des vœux des étudiants.

Les étudiants du parcours finance doivent valider l'UE *Tronc commun finance* (24 ECTS) et l'UE *Mathématiques financières approfondies* (21 ECTS), ainsi que le stage (15 ECTS).

Les autres parcours sont composés de 5 UE à 9 ECTS et du stage (15 ECTS). Chaque UE à 9 ECTS est constituée d'un cours d'un volume horaire de 30 heures. Les étudiants peuvent, dans la limite de 30 heures et 9 ECTS, et sous réserve de l'accord du responsable du master, suivre des cours dans d'autres masters recherche de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée ou même dans des masters recherche extérieurs.

Le stage d'initiation à la recherche commence au mois d'avril. Ce stage (ou mémoire) peut avoir lieu dans une équipe de recherche universitaire ou dans un laboratoire de recherche appliquée d'un organisme public ou d'une entreprise. Le stage donne lieu à une soutenance et compte pour 15 ECTS.

### Contrôle des connaissances et obtention du diplôme

Chaque cours est sanctionné par un examen final. Pour certains cours, un projet informatique peut être demandé aux élèves, la note de projet comptant au maximum pour moitié dans la note finale.

Dans le parcours finance, pour obtenir le diplôme, un étudiant doit avoir une moyenne au moins égale à 10 dans les UE F1 et F2 (avec compensation entre les UE, en proportion des ECTS) et une note de stage également supérieure ou égale à 10. Dans les autres parcours, la moyenne des cinq meilleures notes aux UE à 9 ECTS doit être supérieure ou égale à 10, ainsi que la note de stage ou mémoire.

La moyenne générale est établie en proportion des ECTS (45 ECTS pour les cours, 15 ECTS pour le stage ou mémoire), avec compensation entre les UE (hors stage).

### Débouchés

Certains cours étant nettement orientés vers les applications, en particulier ceux des parcours **finance** et **probabilités appliquées**, les étudiants peuvent trouver, à l'issue du master, des débouchés en entreprise. Les secteurs d'applications concernés sont la finance de marché (analyse quantitative, structuration etc.), la fiabilité, les problèmes d'évolution issus de la physique. Dans ces secteurs, les besoins sont importants au sein des organismes de recherche, des grandes entreprises industrielles et des banques.

Certains étudiants, en particulier ceux qui se destinent à la carrière de chercheur ou d'enseignant-chercheur, peuvent s'orienter vers la préparation d'une thèse. La thèse peut être préparée dans une des équipes de recherche associées au master (le Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR 8050 CNRS) des Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et de Paris-Est Créteil, l'Équipe d'Analyse et Probabilités (EA 2172) de l'Université d'Evry, le CERMICS, Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique de l'École des Ponts)

Pour les diplômés admis à préparer une thèse, divers financements peuvent être envisagés (allocations de recherche du Ministère de l'Education Nationale, bourses C.I.F.R.E., bourses de l'École des Ponts, ...). Les allocations de recherche du Ministère de l'Education Nationale sont attribuées par l'intermédiaire des écoles doctorales. Le master a des relations privilégiées avec l'école doctorale *Mathématiques et STIC* du Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur *Université Paris-Est* et avec l'école doctorale *Sciences et Ingénierie* de l'Université d'Évry.

**Liste des UE (contenu détaillé dans les pages suivantes)**

**UE du parcours finance**

**F1** Tronc commun finance (24 ECTS)

- Calcul stochastique et applications en finance
- Méthodes de Monte-Carlo en finance
- Modèles de taux d'intérêt
- Informatique
- Semaine d'ouverture Finance Quantitative

**F2** Mathématiques financières approfondies (21 ECTS)

- deux cours à 6 ECTS à choisir parmi les quatre suivants : *Traitement des données de marché : aspects statistiques et calibration*, *Outils mathématiques pour le risque de crédit*, *Mesures de risque en finance*, *Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie.*
- un cours à 9 ECTS (autre que 1.4, 1.6 ou 2.2).

**Autres UE (cours à 9 ECTS)**

**1.1** Equations d'évolution : théorie et algorithmes

**1.2** Outils d'analyse et équations aux dérivées partielles

**1.3** Analyse pour les modèles variationnels

**1.4** Calcul stochastique et applications en finance

**1.5** Statistique des processus à temps discret

**1.6** Processus stochastiques 2

**2.1** Modèles stochastiques

**2.2** Modélisation et simulation

**2.3** Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance

**2.4** Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image

**2.5** Introduction aux EDP non-linéaires dispersives

**2.6** Géométrie asymptotique, analyse harmonique et compressed sensing

## F1 Tronc commun finance

Cette Unité d'Enseignement est organisée en partenariat avec la formation d'ingénieurs de l'Ecole des Ponts. Le cours *Calcul stochastique et applications en finance* a lieu à l'université (pour le contenu détaillé, voir page 15).

Les cours *Méthodes de Monte-Carlo en finance* et *Modèles de taux d'intérêt* ont lieu à l'École des Ponts. Le cours *Méthodes de Monte-Carlo en finance* présente les techniques de simulation du hasard pour le calcul effectif de quantités intervenant en finance (voir contenu détaillé page 6). Il est complété par des séances de mise à niveau ou d'approfondissement en informatique.

Le cours *Modèles de taux d'intérêt* présente les diverses approches de la modélisation des taux d'intérêt et les calculs de prix d'obligations et d'options sur produits de taux d'intérêt (voir contenu détaillé page 7).

La *semaine d'ouverture "finance quantitative"*, organisée par l'École des Ponts, permettra aux étudiants de s'initier aux réalités des marchés financiers, notamment grâce à des interventions de praticiens.

## F2 Mathématiques financières approfondies

Cette UE obligatoire du parcours finance est constituée d'un cours à 9 ECTS (à choisir parmi les UE à 9 ECTS, en accord avec le responsable du master) et de deux cours à 6 ECTS à choisir parmi les quatre suivants :

- Traitement des données de marché : aspects statistiques et calibration (voir page 8).
- Outils mathématiques pour le risque de crédit (voir page 9).
- Mesures de risque en finance (voir page 10). Ce cours a lieu d'octobre à février.
- Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie (voir page 11).

Parmi les cours à 9 ECTS, sont particulièrement recommandés les cours *Equations d'évolution : théorie et algorithmes* et *Introduction au calcul de Malliavin et applications numériques en finance.* Les cours *Processus stochastiques 2* et *Modélisation et simulation* ne sont pas validables dans le parcours finance.

## F1.1 Méthodes de Monte-Carlo en Finance

**Enseignants :** Bernard Lapeyre, Benjamin Jourdain, Eric Benhamou.

**Partie I : Méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales dans $\mathbb{R}^n$**

1. Méthode de Monte-Carlo, introduction aux méthodes de réduction de variance.
2. Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, fonction d'importance, techniques de stratification, conditionnement, ...
3. Suites à discrépances faibles, éléments théoriques, exemples classiques (Halton, Faure, Sobol, Niederreiter, ...).
4. Utilisation de suites à discrépance faible et de techniques de quantification en finance.
5. Introduction au Monte Carlo Américain. Description de l'algorithme de Longstaff-Schwartz et de quantification.

**Partie II : Méthodes de Monte-Carlo pour les processus financiers**

Dans cette partie nous nous intéresserons au calcul des prix d'options qui s'écrivent comme l'espérance d'une fonction du processus de diffusion modélisant l'actif sous-jacent. L'erreur Monte Carlo se décompose en un terme de biais qui correspond à la discrétisation en temps de la diffusion plus un terme d'erreur statistique. Nous étudierons le biais avant de passer en revue les méthodes de réduction de variance qui permettent de réduire l'erreur statistique, puis d'aborder la discrétisation des modèles qui comportent des sauts :

1. Discrétisation de diffusions : schémas classiques (Euler, Milshtein, ...), vitesses de convergence. Techniques d'extrapolation. Schémas d'ordre supérieur forts et faibles.
2. Techniques de discrétisation adaptées aux options exotiques (cas des options barrières et look-back, des options asiatiques, ...).
3. Réduction de variance pour les calculs d'options dans les modèles de diffusion.
4. Simulation de modèles avec sauts.

**Partie III: Les méthodes de Monte Carlo vues par un professionnel de la modélisation**

1. Pricing d'un produit path dependent complexe sur taux d'intérêt. Description des flux financiers, risque à prendre en compte dans la modélisation, premier monte carlo pour le calcul de l'ajustement de convexité.
2. Calcul de la condition TARN du produit. Comparaison Monte Carlo Quasi Monte Carlo. Estimation des strikes implicites. Discussion sur la calibration.

*Bibliographie :*


- Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- Bernard Lapeyre, Etienne Pardoux, et Rémi Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, volume 29 de *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

## F1.2 Modèles de taux d'intérêt

**Enseignant :** Vlad Bally.
**Objectif du cours**

Le but du cours est de présenter aux étudiants une introduction aux modèles usuels employés dans la théorie des taux d'intérêt. Trois classes de modèles se sont imposées. Le point de vue le plus ancien explique le comportement des taux d'intérêt par le taux court (instantané). Une multitude de modèles pour la dynamique du taux court ont été proposés, une des motivations principales étant leurs aptitudes diverses pour la calibration. Mais les modèles de taux court ont le désavantage de ne pas pouvoir expliquer l'évolution des zéro coupons en toute généralité. Une nouvelle génération de modèles est apparue : tout d'abord, le modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM), basé sur les *taux forward*, qui réalise une modélisation en toute généralité et a en plus des vertus du point de vue de la calibration. Puis, les "market models" - celui de Brace-Gatarek-Musiela (BGM), mais aussi celui de Jamishdian - qui focalisent leurs intérêt sur un certain type de produits financiers et établit une modélisation dans laquelle le calcul du prix de ce type de produit se fait par formules explicites.

**Plan du cours**

**Partie 1.** Modèles de taux court.
a. Présentation générale: zéro coupons, taux courts, taux forward instantanés.
b. L'équation de structure. Approche EDP et approche martingale.
c. Modèles courants de taux courts: Vasicek, Ho et Lee, Hull et White, Cox-Ingersol-Ross.
d. Modèles multi-facteurs.
e. Modèles à structure affine.

**Partie 2.** Modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM).
a. Modélisation martingale et condition de dérive de HJM.
b. Changement de numéraire et probabilités forward.
c. Formule de Black.
d. Evaluation du prix des produits courants: Caps, floors, swaps et swaptions. Taux swap.

**Partie 3.** Modèles de marché. Le modèle de Brace-Gatarek-Musiela (BGM).

*Bibliographie :*


- Björk T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- Björk T.(1997), *Interest Rate Theory*, in Runggaldier (ed.) *Financial Mathematics,* Springer Lecture Notes in Mathematics **1656**. Springer Verlag, Berlin.
- Brigo D. et Mercurio F., *Interest rate models, theory and practice*, Springer Finance, 1998.
- Lamberton D., Lapeyre B. (1997), *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses.

### F2.1 Traitement des données de marché : aspects statistiques et calibration

**Enseignants :** Aurélien Alfonsi, Stéphane Crépey, Arnaud Gloter.

Estimation statistique pour des modèles de processus stochastiques liés aux données de marché (diffusions, modèle à volatilité stochastique et modèle GARCH). Estimation de la volatilité avec données haute fréquence et bruit de microstructure. Présentation générale de la problématique de calibration et différences avec l'approche statistique. Introduction aux problèmes inverses mal posés et à la régularisation de Tikhonov. Rappels d'optimisation. Calibration de modèles affines et intérêt du pricing par FFT dans ce contexte. Etude en particulier du modèle de Heston. Calibration du modèle à volatilité locale et problèmes de stabilité de la formule de Dupire. Limites de la calibration aux seules lois marginales et calibration avec Monte-Carlo.

*Bibliographie :*


- D. Dacunha-Castelle, M. Duflo. *Problèmes à temps mobiles*, Masson 1983.
- D. Bosq, H.T Nguyen. *A course in stochastic processes: Stochastic models and Statistical inference.*
- I. Basawa, P. Rao.*Statistical inference for stochastic processes.* Kluwer, 1996.

## F2.2 Outils mathématiques pour le risque de crédit

**Enseignante :** Monique Jeanblanc.

Nous présenterons dans ce cours les outils mathématiques utiles pour modèliser les événements liés au défauts. Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude de grossissement de filtration. Une autre partie montrera comment utiliser le calcul stochastique pour des processus à variation bornée. On s'intéressera au cas des swaps de crédit et après avoir donné la dynamique du prix de ces produits, on montrera comment exhiber des couvertures pour des produits dérivés.

*Bibliographie :*


- Bielecki, T.R. and M. Rutkowski (2002) *Credit Risk: Modelling, Valuation and Hedging.* Springer-Verlag.
- Lando, D. (2004) *Credit Risk Modeling.* Princeton University Press, Princeton.
- Schönbucher, P.J. (2003) *Credit Derivatives Pricing Models.* Wiley.
- Cont, R. and Tankov, P. (2004) *Financial Modeling with Jump Processes.* Chapman & Hall/CRC.
- Mansuy, R. and Yor, M. (2006), *Random Times and (Enlargement of) Filtrations in a Brownian Setting.* Springer, Lectures Notes in Mathematics, 1873. (Chapitre 1)

## F2.3 Mesures de risque en finance

**Enseignants :** Aurélien Alfonsi (École des Ponts), Peter Tankov (École Polytechnique).

La maîtrise des risques est au cœur des préoccupations du monde bancaire comme en témoigne les recommandations du Comité de Bâle sur le contrôle bancaire (Convergence nationale de la mesure et des normes de fonds propres). La mise en œuvre des recommandations se traduit également par des recrutements dans les services de contrôle des risques des banques. Le but de ce cours est de présenter dans une partie théorique les outils de mesure des risques concernant la salle de marché et la gestion du portefeuille d'actifs. Les principaux thèmes théoriques seront : les mesures de risques monétaires et la représentation des mesures de risque convexes, la théorie des valeurs extrêmes et la représentation multidimensionnelle des risques via les copules. Dans une deuxième partie pratique, des intervenants de la Société Générale présenteront les méthodes utilisées par les différents départements pour évaluer le risque financier.

Le programme détaillé peut être consulté sur le site

`http://cermics.enpc.fr/~alfonsi/mrf.html`.

Le cours est financé par la "Chaire Risques Financiers" de la Société Générale, l'Ecole Polytechnique et l'Ecole des Ponts. Il est commun avec le Master Probabilités et Applications de Paris 6.

*Bibliographie :*


- Basel Committee on Banking supervision. *International convergence of capital measurement and capital standards.*
- Föllmer H. and A. Schied (2004) *Stochastic finance. An introduction in discrete time.* De Gruyter Studies in Mathematics **27**, 2004.
- McNeil A.J., R. Frey and P. Embrechts *Quantitative risk management. Concepts, techniques and tools.* Princeton Series in Finance, 2005.
- Roncalli T. *La gestion des risques financiers.* Economica. 2004.

## F2.4 Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

**Enseignants :** Jean-François Delmas, Benjamin Jourdain.

L'objectif de ce cours est d'introduire les processus de Lévy et le calcul stochastique avec sauts en vue d'applications au marché de l'énergie. Les processus de Lévy sont des processus à accroissements indépendants et stationnaires qui généralisent le mouvement Brownien en relâchant la propriété de continuité des trajectoires satisfaite par ce processus. Après avoir montré, au travers de la formule de Lévy-Kyntchine, que la loi d'un processus de Lévy ne dépend que d'un triplet de caractéristiques, nous donnerons une représentation des processus de Lévy à partir d'un mouvement Brownien et d'une mesure ponctuelle de Poisson. Nous construirons ensuite les intégrales stochastiques par rapport à la mesure de Poisson et à la mesure de Poisson compensée et démontrerons les formules d'Itô qui permettent de manipuler ces intégrales. Nous introduirons aussi quelques éléments de calcul stochastique pour les semimartingales générales. Nous présenterons ensuite les applications des processus à sauts en mathématiques financières et plus particulièrement pour le marché de commodités énergétiques: fonctionnement du marché, produits dérivés, modèles de prix à l'aide des processus de Lévy, méthodes numériques et application à la valorisation d'actifs de stockage gaz.

Une partie des séances est assurée par des intervenants d'EDF. Le cours est financé par la "Chaire Risques Financiers" de la Fondation du Risque.

Ce cours a lieu à l'Ecole des Ponts.

## 1.1 Équations d'évolution : théorie et algorithmes

**Enseignant :** Robert Eymard.

Le but de ce cours est d'étudier l'approximation des problèmes d'évolution non-linéaires, aussi bien du type des inéquations variationnelles que de type parabolique dégénéré (ces méthodes sont utilisées dans le cadre des mathématiques financières, pour le pricing des options américaines).

On commence l'étude de la discrétisation de ces équations par le cas des problèmes stationnaires (en particulier, on revoit rapidement les méthodes d'éléments finis). Puis le cas de l'évolution linéaire (équation de la chaleur) est étudié, et enfin, on étudie les équations paraboliques dégénérées, pour lesquelles on établit une relation avec les inéquations variationnelles.

- **Notions théoriques abordées.** On utilise en particulier les notions d'espace de Sobolev, les théorèmes de Riesz et Lax-Milgram, le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, pour établir la convergence des solutions approchées vers la solution exacte.
- **Etude numérique.** Le fil conducteur du cours étant l'application aux mathématiques financières, il est proposé aux étudiants de mener en parallèle au cours théorique la mise en oeuvre du calcul du prix d'une option américaine en utilisant les méthodes du cours. Les étudiants sont alors invités à remettre un document de synthèse dont la note est prise en compte dans une moyenne avec la note de partiel et la note d'examen.

*Bibliographie :*


- Y. Achdou, O. Pironneau, *Computational methods for option pricing*, SIAM series: Frontiers in Applied Mathematics, 2005.
- H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1983.
- P.G. Ciarlet , J.L.Lions, *Handbook of Numerical Analysis*, volume 1, North Holland, 1992.
- R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques*, Masson, (chapitres XIV, XV, XVIII et XX).
- P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des EDP*. Masson, 1983.


**Connaissances préalables requises :** Théorie de l'intégration, notions d'analyse fonctionnelle.

## 1.2 Outils d'analyse et équations aux dérivées partielles

**Enseignant :** Marco Cannone.

Le but de ce cours est de compléter les connaissances des étudiants en analyse fonctionnelle et de les initier à quelques outils utiles pour les équations aux dérivées partielles et pour l'analyse multifractale. Les sujets suivants seront abordés :

- Compléments sur les espaces de Banach : dualité, topologie faible...
- Analyse des espaces $L^p$ : quelques propriétés, interpolation, applications...
- Rappels et compléments sur les distributions : techniques de régularisation et d'approximation, distributions tempérées, analyse de Fourier.
- Espaces de Sobolev, injection de Sobolev, théorème de compacité de Rellich. Application des espaces de Sobolev aux EDP. Principe des méthodes variationnelles. Application au problème de Dirichlet, principe du maximum.
- Introduction aux ondelettes : construction, algorithmes, exemples de bases. Caractérisation des espaces fonctionnels. Applications.

*Bibliographie :*


- R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'Analyse fonctionnelle*, Masson, 1997.
- Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, tome 1, Hermann, 1990.
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Hermann, 1993.
- W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience.
- K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, sixth edition, 1995.

### 1.3 Analyse pour les modèles variationnels

**Enseignant :** Etienne Sandier

Le cours traite de questions mathématiques posées sous forme variationnelle, c'est-à-dire sous forme d'une énergie à minimiser, et de techniques d'analyse correspondantes, relevant essentiellement du domaine des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. La liste suivante est indicative des thèmes qui seront abordés:

- Notions de base : méthode directe, équations d'Euler-Lagrange.
- Exemples avec perte de compacité. Problème de Plateau pour les films de savons ou problèmes invariants de jauge. Exemples ou le minimum n'est pas atteint.
- Propriétés liées à la présence de symmétries: forme conservative des équations, principe des points critiques symmétriques, réarrangement et symmétrisation.
- Fonctionnelles convexes et transformée de Fenchel: formulations du problème de l'obstacle, dualité de Kantorovitch pour le transport optimal.
- Convergence variationnelle, ou Gamma-convergence, exemple de Modica-Mortola, fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

*Bibliographie:*


- Brezis, H., *Analyse fonctionnelle*, Masson.
- Evans, L. C., *Weak convergence methods for non linear partial differential equations*, Expository lectures held at Loyola, University of Chicago, June 27-July 1, 1988, CBMS, vol. 74 (American Mathematical Society, 1990).
- Struwe, M., *Variational methods*, Springer (1990); second edition: Ergebnisse Math. 34, Springer (1996); third edition (2000).

### 1.4 Calcul stochastique et applications en finance

**Enseignant :** Damien Lamberton.

Le but de ce cours est de présenter les processus stochastiques à temps continu usuels et de permettre aux étudiants des approfondissements dans des directions telles que : la finance, les méthodes de Monte-Carlo, les liens entre probabilités et équations aux dérivées partielles.

- Mouvement brownien : construction, propriétés des trajectoires.
- Martingales à temps continu, théorème d'arrêt.
- Intégrale stochastique, formule d'Itô. Application à la finance (modèle de Black-Scholes, modèles à volatilité locale).
- Équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens. Liens avec les équations aux dérivées partielles.
- Application aux options. Inéquations variationnelles et options américaines.

*Bibliographie :*


- N. Bouleau, *Processus Stochastiques et Applications*, Hermann (1988).
- F. Comets, M. Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffusions*, Dunod (2006).
- J. Hull, *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall (2006).
- I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag (1987).
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses (1997).
- R. Portait, P. Poncet *Finance de marché*, 2nde édition, Dalloz (2009). Springer (1997).
- D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag (1991).


**Connaissances préalables requises :** Théorie de la mesure et calcul des probabilités (voir, par exemple le livre *L'essentiel en théorie des probabilités* de J. Jacod et P. Protter, Vuibert, 2003).

### 1.5 Statistique des processus à temps discret

**Enseignantes** : Cristina Butucea, Florence Merlevède

**1ère partie.** Concernant beaucoup de phénomènes, les observations ne sont pas indépendantes mais ont plutôt la propriété suivante: Les observations du "passé" et du "présent" peuvent avoir une influence considérable sur les observations du "futur proche", et plutôt une influence décroissante sur les observations du "futur lointain". Pour l'analyse statistique des observations de tels phénomènes, il est naturel d'utiliser des modèles de suites aléatoires pour lesquels la dépendance décroît avec le temps dans le sens où le passé et le futur lointain sont de plus en plus indépendants. Parmi les théorèmes limites étudiés, on s'interessera particulièrement à la convergence du processus empirique (décrivant le nombre d'observations jusqu'à $t$) vers un pont brownien. Nous étudierons cette convergence lorsque les variables ne sont pas nécessairement iid, introduirons alors des coefficients de dépendance qui apparaissent naturellement dans ce contexte et exhiberons des classes de processus satisfaisant les conditions de dépendance introduites. Ces coefficients de dépendance nous permettront également d'étudier l'erreur $\mathbf{L}^p$ ($p \geq 2$) intégrée des estimateurs à noyaux de la densité de processus stationnaires.

**2ème partie.** Nous allons approfondir l'estimation de fonctions $f$ (la densité de probabilité, la densité spectrale, ...) et fonctionnelles (l'énergie $\int f^2$, l'excess mass $\int (f-\lambda)_+$ pour un seuil $\lambda > 0$) liées aux processus stationnaires. D'autres techniques d'estimation seront introduites: les estimateurs par projection sur une base orthonormée (par exemple, séries de Fourier, ondelettes).

Plus particulièrement, dans le cas de suites de variables indépendantes, identiquement distribuées, nous aborderons des problèmes inverses. Il s'agit de situations où les observations dont on dispose permettent d'estimer une certaine transformation de la fonction d'intérêt. Les méthodes d'estimation perdent en performance: leur vitesse d'estimation est plus lente que dans le problème direct. Nous chercherons à formaliser le lien entre la perte de performance et la transformation intrinsèque au problème.

*Bibliographie :*


- Billingsley, P. (1999). Convergence of probability measures. Second edition. *John Wiley & Sons, New York.*
- Dedecker, J, Doukhan P., Lang, G., León J.R., Louhichi, S. and Prieur, C. (2007). Weak dependence with examples and applications. *Lecture notes in Statistics.* **190** Springer.
- Hall, P. et Heyde, C. C. (1980). Martingale Limit Theory and its Applications. *Lecture notes in Statistics.* **129** *Academic Press, New York-London.*
- Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D. and Tsybakov, A. (1998). Wavelets, approximation, and statistical applications. *Springer-Verlag, New York.*
- Tsybakov, A. B. (2004). Introduction à l'estimation non-paramétrique. *Springer-Verlag, Berlin.*

### 1.6 Processus stochastiques 2

**Enseignant :** Djalil Chafaï

Ce cours est une UE du master professionnel *IMIS* (Ingénierie Mathématique, Informatique et Statistique), avec une évaluation spécifique pour les étudiants du master recherche. Il donnera lieu à l'élaboration d'un projet sous Scilab, Octave, ou R. L'accent est mis sur la simulation et les exemples. Grandes lignes du cours :

- Chaînes de Markov à temps discret. Approche récursive.
- Théorèmes limites, couplage, simulation, méthodes MCMC.
- Processus de Poisson et chaînes de Markov a temps continu.
- Files d'attente, processus de Yule. Extensions semi-markoviennes.

### 2.1 Modèles stochastiques

**Enseignant** : Djalil Chafaï.

Le but de ce cours est de contribuer à la construction dune culture probabiliste classique mais éclectique, basée sur des modèles, des problèmes, des outils en action. Chacune des dix séances de trois heures est consacrée à létude dun modèle stochastique particulier. Certaines séances débutent par quinze minutes dexposé dun étudiant sur un passage peu ou pas détaillé lors des séances précédentes. Le choix des modèles abordés peut varier dune année sur lautre, ce qui rend ce cours plutôt flexible et renouvelable.

Ce cours peut intéresser tous les étudiants du M2R, sans distinction de filières.

Prérequis : niveau M1 en mathématiques notamment en probabilités.

Notes de cours (environ 90 pages) : http://djalil.chafai.net/enseignement.html

## 2.2 Modélisation et simulation

**Enseignant :** Thierry Jeantheau.

Ce cours est une UE du master professionnel *IMIS* (Ingénierie Mathématique, Informatique et Statistique), avec une évaluation spécifique pour les étudiants du master recherche.

Il s'adresse à des étudiants ayant déjà reçu un cours de base en probabilités et ayant déjà étudié les chaînes de Markov. Il présente les dif‘érentes méthodes pour simuler par ordinateur des variables alátoires. Le cas des vecteurs aléatoires est aussi traité, et la notion de copule est introduite pour modéliser et simuler des structures de dépendance spécifique. On aborde l'utilisation des données simulées par les méthodes de Monte Carlo, notamment pour le calcul d'intégrale. On présente l'utilisation des chaîne de Markov pour simuler des loi compliquées (méthode MCMC), et en particulier l'algorithme de Metropolis. Enfin, on applique cette méthode pour résoudre des problèmes d'optimisation, en présentant l'algorithme du recuit simulé.

Toutes les méthodes vues dans ce cours sont également programmées par les étudiants, en utilisant un logiciel de calcul numérique (type Scilab) ou statistique (type R).

1. Méthodes de simulation des variables et des vecteurs aléatoires.
2. Introduction à la modélisation par les Copules et simulation.
3. Méthodes de Monte Carlo, application aux calculs d'intégrales.
4. Simulation par chaîne de Markov (méthode MCMC), algorithme de Metropolis.
5. Application au problème d'optimisation, algorithme du recuit simulé.

### 2.3 Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance

**Enseignant :** Vlad Bally

Le but du cours est de donner une introduction élémentaire au Calcul de Malliavin et à ses applications, avec un intérêt particulier pour les applications numériques en finance. Les étudiants sont sensés avoir suivi un cours de calcul stochastique de base. Les points principaux du cours seront les suivants.

- **Présentation Générale.** Formule d'intégration par parties générale et applications. Les opérateurs différentiels et la formule de dualité : cas fini-dimensionnel et passage à la limite. Formule de représentation de Clark-Ocone et calcul de la couverture. Applications aux diffusions.
- **Calculs de sensibilités.** Les *grecques.*
- **Options américaines.** Calcul de l'espérance conditionnelle. Programation dynamique et méthode de Monte Carlo. Localisation (réduction de variance).
- **Espaces de Sobolev sur l'espace de Wiener.**
- **Décomposition en chaos.**

*Bibliographie :*


- D Nualart (1995), *The Malliavin calculus and related topics.* Springer Verlag.
- N. Ikeda and S. Watanabe (1989), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland.
- S. Watanabe (1984), *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin calculus.* Tata Institute of Fundamental Research, Springer Verlag.

## 2.4 Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image

**Enseignants :** Stéphane Jaffard, Stéphane Seuret.

L'analyse multifractale a d'abord été introduite en physique et en traitement du signal pour étudier et modéliser les écoulements turbulents, puis de nomrbreux signaux de nature très diverses (traffic, signaux physiologiques, ...). Des liens avec les EDP et la théorie des nombres ont également été établis. Les ondelettes permettent actuellement l'implantation numérique de ces méthodes en analyse du signal et d'image, où ces concepts fournissent de nouveaux outils de classification et de simulation.

Le but du cours est de donner une introduction aux outils utilisés en analyse multifractale, puis de se concentrer sur un domaine d'application. Le cours comprendra donc deux parties:

1. Concepts et résultats fondamentaux.
   - Rappels de théorie de la mesure, mesures et dimensions de Hausdorff, techniques de calcul de dimensions.
   - Espaces fonctionnels (Sobolev, Besov, oscillations) et exposant de Hölder
   - bases d'ondelettes
   - Définition et majorations de spectres de singularités.
   - Le formalisme multifractal: formulation mathématique et utilisation pratique en traitement du signal et de l'image
2. Des applications seront choisies dans la liste suivante :
   - Méthodes statistiques pour l'estimation de spectres de singularités de signaux et d'images.
   - Modèles de turbulence (cascades multiplicatives).
   - Séries aléatoires d'ondelettes.
   - Analyse multifractale de fonctions remarquables: Fonctions de Bolzano, de Riemann, de Polya, séries de Davenport
   - Introduction aux méthodes d'ubiquité.
   - Analyse multifractale des processus de Lévy, application à l'équation de Burgers.
   - Analyse par ondelettes de domaines fractals.

Des notes de cours seront distribuées.

### 2.5 Introduction aux EDP non-linéaires dispersives

**Enseignants :** Valeria Banica, Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset

Ce cours se structure en deux parties. Une partie est consacrée à l'équation de Schrödinger, qui apparait comme modèle en théorie quantique des champs, dans l'optique non-linéaire et en mécanique des fluides. Une autre est consacrée à l'équation des ondes semilinéaires.

Dans les deux parties, on étudiera d'abord quelques propriétés de l'équation linéaire via des techniques d'analyse harmonique. On s'attachera ensuite à mettre en évidence certaines propriétés qualitatives dans le cas semi-linéaire : existence locale, explosion en temps fini, existence globale, comportement asymptotique...

*Bibliographie :*


- T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York (2003).
- M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss , *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **79**, AMS, Providence.
- J. Ginibre, *Introduction aux équations de Scrödinger non linéaires.*, Editions de l'Université de Paris-Sud (1995).
- P.-G. Lemarié-Rieusset: *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*, Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, (2002).
- C. Sogge, *Lectures on nonlinear wave equations*, monographs in analysis II, International Press, Cambridge (1995).
- E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press (1971).
- C. Sulem and P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Applied Mathematical Sciences. 139. New York, NY : Springer. xvi, 350 p. (1999).
- W. A. Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **73**, AMS, Providence (1989).
- T. Tao, *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 106. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xv, 373 p. (2006).

### 2.6 Géométrie asymptotique, analyse harmonique et compressed sensing

**Enseignants :** Matthieu Fradelizi, Olivier Guédon.

A l'interface entre géométrie classique, théorie locale des espaces de Banach et probabilités, la géométrie asymptotique décrit les phénomènes qui se produisent dans un espace métrique mesuré de dimension n lorsque n tend vers l'infini. L'objectif du cours sera de présenter quelques résultats importants qui relient les phénomènes de concentration de la mesure et l'analyse harmonique. L'étude d'inégalités isopérimétriques et de leur équivalent fonctionnel sur la sphère $S^n$, l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, dx)$, l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, d\gamma_n)$ et l'espace de Walsh $\{-1; 1\}^n$ de dimension $n$ permet d'établir dans chacun de ces espaces des phénomènes de concentration de la mesure qui ont des conséquences dans des domaines aussi variés que la géométrie des convexes en grande dimension, la théorie des graphes et l'étude des valeurs singulières de matrices aléatoires. Les inégalités de concentration permettent d'établir des propriétés universelles sur les sections de corps convexes. Par ailleurs, la reconstruction de signaux de petit support au moyen d'un algorithme de minimisation $\ell_1$ est intimement reliée à l'étude des sections euclidiennes de la boule $\ell_1$.

Le cours sera composé de deux parties. Dans la première partie, on introduira les méthodes de semi-groupes et leurs applications en géométrie convexes, gaussiennes et discrètes. Les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck et de la chaleur seront particulièrement étudiés. On démontrera les inégalités de Brunn-Minkowski et de Ehrhardt et leur forme fonctionnelle. On en déduira des inégalités isopérimétriques pour différentes mesures (Lebesgue, gaussienne, Bernoulli) puis des inégalités fonctionnelles de type Poincaré, Sobolev et log-Sobolev et enfin des inégalités de concentration de la mesure dans chacun des espaces considérés. Enfin, la preuve très récente de Ledoux d'un théorème d'E. Milman qui démontre qu'en courbure positive, l'isopérimétrie se déduit de la concentration, sera présentée.

La seconde partie du cours sera consacrée à l'étude d'inégalités classiques d'analyse harmonique et de la géométrie des corps convexes. Nous présenterons une version géométrique des inégalités de Brascamp-Lieb. Ces inégalités sont un raffinement des inégalités de Young concernant la norme $L_r$ du produit de convolution de deux fonctions $f$ et $g$ dans $L_p$ et $L_q$, avec $1/p + 1/q = 1/r$. Dans une seconde partie, nous présenterons des résultats de géométrie des convexes en grande dimension. En effet, dans cette situation, les corps convexes ont des propriétés universelles et nous illustrerons ce phénomène par la présentation du théorème de Dvoretzky : pour tout convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, il existe des sections par des sous-espaces vectoriels de dimension $\log(n)$ qui sont presque euclidiennes. S'il y a suffisamment d'étudiants intéressés, nous étudierons aussi la théorie développée récemment sur la reconstruction exacte ou approchée de vecteurs de petit support.